【例 1】一个班有若干个学生，其中会游泳的有 30 人，会打乒乓球的有 27 人，会下象棋的有 24 人，三样都会的有 1 人，那么只会两样的至多有（　　）人？

【解析】设只会游泳和乒乓球的有 A 人，只会游泳和象棋的有 B 人，只会象棋和乒乓球的有 C 人。

$$\begin{cases} A+B+1\le 30 \\ B+C+1\le 24 \\ C+A+1\le 27 \end{cases} \qquad 3+2\times(A+B+C)=81 \qquad A+B+C\le 39$$

【例 2】甲乙丙三人都在读同一本故事书，书中有 100 个故事，已知甲读了 85 个故事，乙读了 70 个故事，丙读了 62 个故事，请问：

（1）甲乙丙三人共同读过的故事书最少有（　）个？

（2）如果每个人都是从某一个故事开始，按顺序连续往后读，那么甲乙丙三人共同读过的故事书最少有（　　）个？

【解析】(1)现在要求三人共同读过的故事书尽可能的少，则两人两人读过的故事应该尽可能的多，当每一个故事都被两人读过的时候，共被读过 200 次，所以被三人读过的故事书还有$85+70+62-100\times 2=17$（个）

（2）若从某一个故事开始，按照顺序从前往后读，三人读过的故事书最少，总共应该有$70+62-100=32$（个）

【例 3】问以 2013 为分母的最简真分数的和为（　）

【解析】因为$2013=3\times 11\times 61$，所以分子必定在 1 到 2013 之间，既不是 3 的倍数，也不是 11 的倍数，也不是 61 的倍数。因为 3 的倍数有$11\times 61=671$个，11 的倍数有$3\times 61=183$个，61 的倍数有$3\times 11=33$个，既是 3 的倍数，又是 11 的倍数有 61 个，既是 3 的倍数，又是 61 的倍数有 11 个，既是 11 的倍数，又是 61 的倍数有 3 个，既是 3 的倍数，又是 11 的倍数，又是 61 的倍数有 1 个，所以既不是 3 的倍数，又不是 11 的倍数，又不是 61 的倍数有$2013-(671+183+33-61-11-3+1)=1200$个。显然如果 n 与 2013 互质，那么（2013-n)互质，所以分母为 2013 的最简真分数可两个两个凑成 1，所以它们的和为 600。

【例 4】从 1,2,3,4，...，2014 共 2014 个正整数中，最多能取出（　　）个数，使得对于取出的数中任意三个数 a,b,c（a＜b＜c),都有 ab≠c。

【解析】要求最多，则应该从大到小取数，由于$44\times 45=1980$＜2014，$45\times 46=2070$＞2014.所以当把 45 以后的所以数都取出时，必不存在 ab=c，此外还能把 1 取出，因为 1 乘以任何数都等于它本身，这样一共取出了$2014-45+1+1=1971$个。

【例 5】（1）从 1,4,7，...100 中任选（　　）个数，其中至少有不同的两组其和都等于 104。

（2）从 1 到 20 这 20 个数中，至少取（　　）个数，才能保证取出的两数一个是另一个的倍数。

（3）从 1,3,5,7,...97,99 中最多可以选出（　　）个数，使得选出的数中，每一个数都

不是另一个的倍数。

【解析】（1） 1,4,7...100 共 34 个数，将其分为（4,100），（7,97）...（49,55）（1），（52），共 18 个抽屉，18+2=20.

(2)从大往小取 20,19,18，...11，这 10 个数，彼此都不说倍数，但是从 1 到 10 中再随便取一个，就会有倍数关系。

（3）因为均是奇数，所以如果存在倍数关系，那么也一定是奇数倍，从 99 开始，从大往小取，99,97,95,...37,35,共可选出 33 个数，每一个都不是另一个的倍数。

【例 6】试证明：从 1,2,3，...65,66 这 66 个数中任意选出 30 个数，其中一定存在 5 个数，它们的最大公约数大于 1。

【解析】证明：把 1 到 66 这 66 个数，按照能否被 2 或 3 或 5 整除构造抽屉，结合三元容斥证：$(30-17)\div 3=4\ldots\ldots 1, 4+1=5$，必有 5 个数来自同一抽屉，公约数为 2 或 3 或 5，证毕。

【例 7】从三位数 100,101,102，...699,700 中任意取出 n 个不同的数，使得总能找到其中三个数，它们数字和相同。那么 n 的最小值是（　　）

【解析】在 100 到 700 中，数字和最小的数为 100，数字和为 1，且其中数字和为 1 的仅有 1 个，剩下的数字和为 2 到 23 这 22 个数字和中的其中一个，且 2 到 23 每种数字和都至少 2 个数，所以 n 的最小值是$1+1+2\times 22+1=47$。

【例 8】在 1，2,3，...2014 这 2014 个自然数中，最多能取出多少个数，使得取出的这些数中任意两个不同的数的和都不是 9 的倍数。

【解析】这些数按照 9 的余数分类，有 0,1,2,3,4,5,6,7,8，因为 9=1+8=2+7=3+6=4+5，所以（1,8），（2,7），（3,6），（4,5）这四组余数中最多只能各选一个，因为$2014\div 9$商为 223，余数为 7，所以我们选择所有除以 9 余数为 1,2,3,4，的数和一个能被 9 整除的数，总共可以有 224+224+224+224+1=897 个。