

第六讲 同余问题

知识点大杂烩

一、带余除法的定义及性质

一般地，如果 a 是整数， b 是整数 ($b \neq 0$)，若有 $a \div b = q \dots r$ ，
也就是 $a = b \times q + r$ ，

$0 \leq r < b$ ；我们称上面的除法算式为一个带余除法算式。这里：

(1) 当 $r = 0$ 时：我们称 a 可以被 b 整除， q 称为 a 除以 b 的商或完全商

(2) 当 $r \neq 0$ 时：我们称 a 不可以被 b 整除， q 称为 a 除以 b 的商或不完全商



二、三大余数定理

1. 余数的加法定理

a 与 b 的和除以 c 的余数，等于 a, b 分别除以 c 的余数之和，或这个和除以 c 的余数。

2. 余数的乘法定理

a 与 b 的乘积除以 c 的余数，等于 a, b 分别除以 c 的余数的积，或者这个积除以 c 所得的余数。

3. 余数的减法定理

a 与 b 的差除以 c 的余数，等于 a, b 分别除以 c 的余数的差，或者这个差除以 c 所得的余数。

三、同余定理

若两个整数 a, b 被自然数 m 除有相同的余数，那么称 a, b 对于模 m 同余，用式子表示为： $a \equiv b \pmod{m}$ ，左边的式子叫做同余式。

同余式读作： a 同余于 b ，模 m 。由同余的性质，我们可以得到一个非常重要的推论：

若两个数 a, b 除以同一个数 m 得到的余数相同，则 a, b 的差一定能被 m 整除

用式子表示为：如果有 $a \equiv b \pmod{m}$ ，那么一定有 $a - b = mk$ ， k 是整数，即 $m \mid (a - b)$



每周一测

【例 1】(难度等级 ※)

求 $478 \times 296 \times 351$ 除以 17 的余数。

【例 2】(难度等级 ※)

用一个自然数去除另一个自然数, 商为 40, 余数是 16. 被除数、除数、商、余数的和是 933, 求这 2 个自然数各是多少?

【例 3】(难度等级 ※※)

号码分别为 101, 126, 173, 193 的 4 个运动员进行乒乓球比赛, 规定每两人比赛的盘数是他们号码的和被 3 除所得的余数. 那么打球盘数最多的运动员打了多少盘?

【例 4】(难度等级 ※※)

一个大于 1 的数去 288, 236, 395 时, 得余数分别为 $a-2$, $a+3$, $2a+5$, 则这个自然数是?

【例 5】(难度等级 ※※※)

有一个自然数, 用它分别去除 63, 90, 130 都有余数, 3 个余数的和是 25. 这 3 个余数中最大的

一个是多少?

【例 6】(难度等级 ※※※)

有五个不同的自然数, 它们当中任意两个数的和是 2 的倍数, 任意三个数的和是 3 的倍数. 为了使这五个数的和尽可能地小, 那么这五个数的和是_____?

【例 7】(难度等级 ※※※※)

1, 4, 8, 10, 16, 19, 21, 25, 30, 43 这 10 个数中取出一些数, 取出的数不超过三个, 并使其和是 11 的整倍数, 那么, 不同的取法有几种?

【例 8】(难度等级 ※※※※)

某住宅区有 12 家住户, 他们的门牌号分别是 1, 2, 3, ..., 12. 他们的电话号码依次是 12 个连续的六位自然数, 并且每家的电话号码都能被这家的门牌号码整除. 已知这些电话的首位数字都小于 6, 并且门牌号码是 9 的这家的电话号码也能被 13 整除, 问这一家的电话号码是什么数?