

2012 年广州学而思华杯赛决赛模拟考试答案

一、填空题（每小题 10 分，共 80 分）

1. 原式

$$\begin{aligned}
 &= 2006 \times \frac{1}{6} - 2006 \times \frac{1}{2012} + 6 \times \frac{1}{2006} - 6 \times \frac{1}{2012} - 2012 \times \frac{1}{2006} - 2012 \times \frac{1}{6} + 3 \\
 &= 3 + (2006 - 2012) \times \frac{1}{6} - (2006 + 6) \times \frac{1}{2012} + (6 - 2012) \times \frac{1}{2006} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

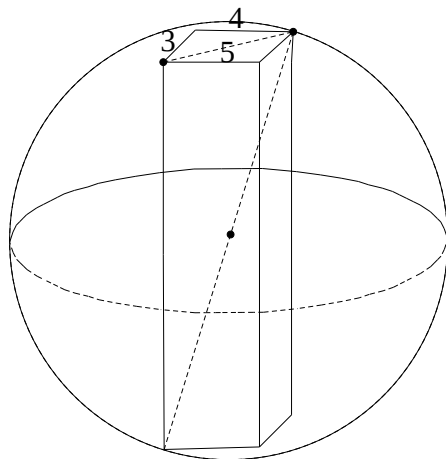
2. 设红球和黄球的数量分别为 $5x$ 个和 $(x+5)$ 个，则 $5x \geq 4x + 20$ ，所以红球至少有 100 个，此时黄球有 25 个，总数为 $100 + 25 = 125$ 个

3. 根据财主的意愿，儿子与母亲按 2:1 分配，母亲与女儿按 2:1 分配，因此儿子、母亲、女儿的应按 4:2:1 的比例分配，所以母亲应得全部财产的 $\frac{2}{4+2+1+1} = \frac{1}{4}$

4. 往返一次的平均速度 $= \frac{2}{\frac{1}{60} + \frac{1}{100}} = 75$ (里/天)

$$75 \times \frac{5}{3} \div 2 = 62.5 \text{ (里)}$$

5. 如图，根据勾股定理，长方体的底面半径为 5 厘米，球的直径为 $6.5 \times 2 = 13$ 厘米，当长方体的 8 个顶点都在球的表面上时，高取得最大值 12 厘米，长方体表面积取得最大值 $(3 \times 12 + 4 \times 12 + 3 \times 4) \times 2 = 192$ (平方厘米)



6. 由于这个数有 3 个不同的质因数，可把因数个数 24 分解成 $2 \times 2 \times 6$ 或 $2 \times 3 \times 4$ ，第一种情况表示这个数形如 $a \times b \times c^5$ ，不超过 600 的有 $2^5 \times 3 \times 5 = 480$ ；第二种情况表示这个数形如 $a \times b^2 \times c^3$ ，不超过 600 的有 $2^3 \times 3^2 \times 5 = 360$, $2^3 \times 3^2 \times 7 = 504$, $2^3 \times 5^2 \times 3 = 600$, $3^3 \times 2^2 \times 5 = 540$ ；综上所述，共有 5 个“婆罗数”。

7. 设这个数为 A ，它可以用等差数列的求和公式表示，设等差数列的首项为 a ，项数为 n ，那么 $A = \frac{(a+a+n-1) \times n}{2} = \frac{(2a+n-1) \times n}{2}$ ，注意到分子的两个因数必定是一奇一偶，那么当项数是 7 和 9 时， $\frac{(2a+n-1)}{2}$ 是整数，此时 A 必为 7 和 9 的倍数；当项数是 8 时，可得 A 必为 4 的倍数，所以 A 必须是 $7 \times 9 \times 4 = 252$ 的倍数，容易验证 252 可表示成 7, 8, 9 个连续非零自然数的和，答案是 252
8. 取出的三个球的所有情况为：①三个球同色，有 4 种；②三个球中有两个球同色，有 $4 \times 3 = 12$ 种；③三个球不同色，有 $C_4^3 = 4$ 种。综上所述，共 $4 + 12 + 4 = 20$ 种不同情况。因此至少要取 $20 + 1 = 21$ 次才能保证有两次取出的情况完全相同。

二、简答题（每小题 10 分，共 80 分）

9. $2012 = 2^2 \times 503$ (1 分)
 则 $\left[\frac{2012}{2} \right] = 1006, \left[\frac{2012}{503} \right] = 4, \left[\frac{2012}{1006} \right] = 2$ (3 分)
 所以 $1 \sim 2012$ 中与 2012 不互质的数共有 $1006 + 4 - 2 = 1008$ 个， (4 分)
 与 2012 互质的有 $2012 - 1008 = 1004$ 个。 (6 分)
 又因为，最简真分数 $\frac{a}{2012}$ 与 $\frac{2012-a}{2012}$ 是成对出现的，每对相加之和为 1 (8 分)
 所以 $1004 \div 2 = 502$ (10 分)
10. 设这只青蛙顺时针一共跳 x 次，逆时针一共跳 y 次。 (1 分)
 则 $5x - 3y = 56$ ① 或 $3y - 5x = 44$ ② (3 分)
 对于方程①，可得 $5x = 56 + 3y$ ，根据余数分析法， $3y$ 除以 5 的余数是 4，可得 y 的最小值为 3，此时 x 取得最小值 13， $x + y = 16$ ； (6 分)
 对于方程②，变形可得 $3y = 44 + 5x$ ，根据余数分析法， $5x$ 除以 3 的余数是 1，可得 x 的最小值为 2，此时 y 取得最小值 18， $x + y = 20$ ； (9 分)
 综上所述，青蛙至少需跳 16 次。 (10 分)
 （说明：若考生只讨论一种情况，即使做对也只给一半分数）
11. 二人下一次同时回到 A 地时，所用的时间相同， (1 分)
 由“时间相同，速度比 = 路程比”可知此时葵葵与琪琪跑过的路程之比为 6:7， (3 分)
 此时两人跑过的均是整数圈，所以葵葵跑了 6 圈，琪琪跑了 7 圈， (6 分)
 二人合共跑了 13 圈 (7 分)
 由于每合跑一圈相遇一次，所以一共相遇 13 次 (10 分)

12. 这三类学生挖树坑的相对效率是

$$\text{甲类: } \frac{\text{挖树坑}}{\text{运树苗}} = \frac{2}{20} = 0.1,$$

$$\text{乙类: } \frac{\text{挖树坑}}{\text{运树苗}} = \frac{1.2}{10} = 0.12,$$

$$\text{丙类: } \frac{\text{挖树坑}}{\text{运树苗}} = \frac{0.8}{7} \approx 0.114. \quad (5 \text{ 分})$$

由上可知, 乙类学生挖树坑的相对效率最高, 其次是丙类学生, 故应先安排乙类学生挖树坑, 可挖 $1.2 \times 15 = 18$ (个), (6 分)

再安排丙类学生挖树坑, 可挖 $0.8 \times 10 = 8$ (个), (7 分)

还差 $30 - 18 - 8 = 4$ (个) 树坑, 由两名甲类学生去挖, 这样就能完成挖树坑的任务, 其余 13 名甲类学生运树苗, 可以运 $13 \times 20 = 260$ (棵)。 (10 分)

三、解答下列各题 (每小题 15 分, 共 30 分)

13. 如图, 连结 FC , HD (1 分)

由等积变形可得, 三角形 AHJ 与三角形 DHJ 面积相等, (3 分)

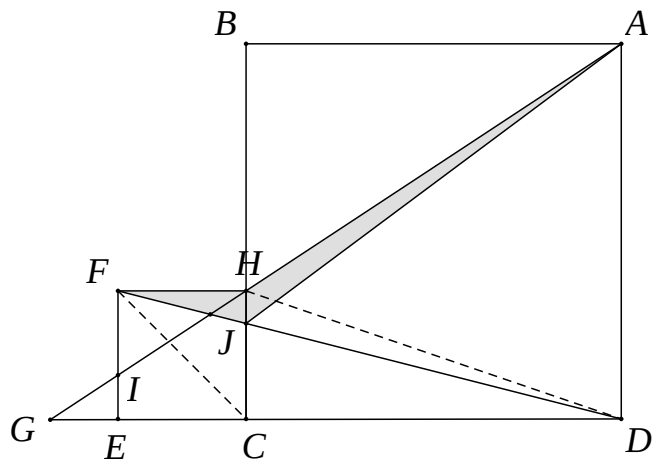
同理, 三角形 FHD 的面积等于三角形 FHC 的面积, (5 分)

即阴影部分的面积等于正方形 $FEGH$ 面积的一半。 (7 分)

在三角形 GEI 中, 根据勾股定理可得 $IE = 3\text{cm}$ (9 分)

设 $FI = a(\text{cm})$, $FH = a + 3(\text{cm})$, 则 $\frac{a+3}{4} = \frac{a}{3}$, 解得 $a = 9$ (13 分)

所以阴影部分的面积 $= \frac{(9+3)^2}{2} = 72 \text{ (cm}^2\text{)}$ (15 分)



14. $\because m - n = 3$

$$[m, n] = 630 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7$$

不妨设 $(m, n) = a$, $m = ax$, $n = ay$, 则 $(x, y) = 1$

$$\begin{cases} a(x - y) = 3 \\ axy = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7 \end{cases} \quad (2 \text{ 分})$$

若 $a=1$ 则 $\begin{cases} x-y=3 \\ xy=2 \times 3^2 \times 5 \times 7 \end{cases}$ 则 x, y 都是 3 的倍数, 矛盾! (3 分)

$$\therefore a=3, x-y=1, xy=2 \times 3 \times 5 \times 7$$

$$\therefore x=15, y=14, m=45, n=42 \quad (5 \text{ 分})$$

$$\text{代入 } \frac{m}{p} + \frac{n}{q} = \frac{3}{10} \text{ 可得 } \frac{45}{p} + \frac{42}{q} = \frac{3}{10}$$

$$\therefore \frac{15}{p} + \frac{14}{q} = \frac{1}{10} \quad (7 \text{ 分})$$

$$\therefore 10 \mid pq$$

$$\therefore (45, p) = (42, q) = 1$$

$$\therefore 2 \mid p, 5 \mid q \quad \text{可设 } p=2s, q=5t, \text{ 则 } \frac{15}{2s} + \frac{14}{5t} = \frac{1}{10} \quad (9 \text{ 分})$$

$$\therefore \frac{75}{s} + \frac{28}{t} = 1 \quad \text{其中 } (s, 75) = (t, 28) = 1 \quad (11 \text{ 分})$$

$$\therefore s=t=75+28=103 \quad (13 \text{ 分})$$

$$\therefore \frac{m}{p} + \frac{n}{q} = \frac{45}{206} + \frac{42}{515} = \frac{3}{10}$$

$$\therefore \frac{q-p}{m-n} = 103 \quad (15 \text{ 分})$$