

第十七届华罗庚金杯少年数学邀请赛 决赛笔试试题 B (小学高年级组)

(时间: 2012 年 4 月 21 日 10:00~11:30)

一、填空题 (每小题 10 分, 共 80 分)

- 算式 $\frac{46}{75} \div \left(\frac{5}{12} + \frac{11}{15} \right) - \frac{12}{55}$ 的值为_____.
- 设 $a\Delta b$ 和 $a\nabla b$ 分别表示取 a 和 b 两个数的最小值和最大值, 如, $3\Delta 4 = 3$, $3\nabla 4 = 4$. 那么对于不同的数 x , $5\nabla(4\nabla(x\Delta 4))$ 的取值共有_____个.
- 里山镇到省城的高速路全长 189 千米, 途经县城, 里山镇到县城 54 千米. 早上 8:30, 一辆客车从里山镇开往县城, 9:15 到达, 停留 15 分钟后开往省城, 11:00 到达. 另有一辆客车于同天早上 8:50 从省城径直开往里山镇, 每小时行驶 60 千米. 那么两车相遇的时间为_____.
- 有高度相同的一段方木和一段圆木, 体积之比是 1:1. 如果将工成尽可能大的圆柱, 将圆木加工成尽可能大的长方体, 则得   方木加到的圆柱体积和长方体的体积的比值为_____.
5. 用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 记 $\{x\} = x - [x]$, 则算式

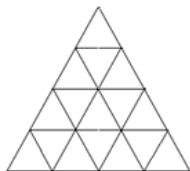
$$\left\{ \frac{2012+1}{5} \right\} + \left\{ \frac{2012+2}{5} \right\} + \left\{ \frac{2012+3}{5} \right\} + \cdots + \left\{ \frac{2012+2012}{5} \right\}$$

的值为_____.

- 某个水池存有其容量的十八分之一的水. 两条注水管同时向水池注水, 当水池的水量达到九分之二时, 第一条注水管开始单独向水池注水, 用时 81 分钟, 所注入的水量等于第二条注水管已注入水池内的水量. 然后第二条注水管单独向水池注水 49 分钟, 此时, 两条注水管注入水池的总水量相同. 之后, 两条注水管都继续向水池注水. 那么两条注水管还需要一起注水_____分钟, 方能将水池注满.

7. 有 16 位选手参加象棋晋级赛, 每两人都只赛一盘. 每盘胜者积 1 分, 败者积 0 分. 如果和棋, 每人各积 0.5 分. 比赛全部结束后, 积分不少于 10 分者晋级. 那么本次比赛后最多有_____位选手晋级.
8. 平面内有 5 个点, 其中任意 3 个点均不在同一条直线上, 以这些点为端点连接线段, 则除这 5 个点外, 这些线段至少还有_____个交点.

二、解答下列各题 (每题 10 分, 共 40 分, 要求写出简要过程)

9. 能否用 540 个右图所示的 1×2 的小长方形拼成一个 6×180 的大长方形, 使得 6×180 的长方形的每一行、每一列都有奇数个星? 请说明理由.
- 
10. 已知 100 个互不相同的质数 $p_1, p_2, \dots, p_{100}$, 记 $N = p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_{100}^2$, 问: N 被 3 除的余数是多少?
11. 王大妈拿了一袋硬币去银行兑换纸币, 袋中有一分、二分、五分和一角四种硬币, 二分硬币的枚数是一分的 $\frac{3}{5}$, 五分硬币的枚数是二分的 $\frac{3}{5}$, 一角硬币的枚数是五分的 $\frac{3}{5}$ 少 7 枚. 王大妈兑换到的纸币恰好是大于 50 小于 100 的整元数. 问这四种硬币各有多少枚?
12. 右图是一个三角形网格, 由 16 个小的等边三角形构成. 将网格中由 3 个相邻小三角形构成的图形称为“3-梯形”. 如果在每个小三角形内填上数字 1~9 中的一个, 那么能否给出一种填法, 使得任意两个“3-梯形”中的 3 个数之和均不相同? 如果能, 请举出一例; 如果不能, 请说明理由.
- 

三、解答下列各题 (每小题 15 分, 共 30 分, 要求写出详细过程)

13. 请写出所有满足下面三个条件的正整数 a 和 b : 1) $a \leq b$; 2) $a+b$ 是个三位数, 且三个数字从小到大排列等差; 3) $a \times b$ 是一个五位数, 且五个数字相同.
14. 记一百个自然数 $x, x+1, x+2, \dots, x+99$ 的和为 a , 如果 a 的数字和等于 50, 则 x 最小为多少?