2014年第25届亚太小学奥林匹克第一回合

2小时
（总分：150分）
2014年4月12日
上午9:00–11:00

（注意事项）
1 尽量解答所有问题。
2 不准使用数学用表或计算器。
3 答案请另填写在所提供的第一回合的作答卷上。
4 只有正确答案才能得分。

第一题至第十题，每题4分
第十一题至第二十题，每题5分
第二十一题至第三十题，每题6分

【第1题】
甲乙两位同学在300米的环形跑道上练习赛跑。两人在同一起点同时出发，同向而行。已知甲的平均速度是每秒5米，乙的平均速度是每秒4.2米，请问当甲第一次从后面追上乙的时候，甲已经跑满了多少圈？
【分析与解】
行程，环形跑道，追及问题。

当甲第一次从后面追上乙，用时$300\div(5-4.2)=375$秒；

当甲第一次从后面追上乙的时候，甲跑了$5\times375=1875$米；
$1875\div300=6\cdots\cdots75$，当甲第一次从后面追上乙的时候，甲已经跑满了6圈。

【第 2 题】

以下四个数字中，哪一个是完全平方数？

(1) 921438　　(2) 76186　　(3) 750235　　(4) 2660161

【分析与解】

数论，完全平方数。

（方法一）

一个整数的平方数被 4 除余 0 或 1，即被 4 除余 2 或 3 的数一定不是完全平方数。

$921438 \equiv 38 \equiv 2 \pmod 4$，

$76186 \equiv 86 \equiv 2 \pmod 4$，

$750235 \equiv 35 \equiv 3 \pmod 4$；

故 921438 、 76186 、 750235 均不是完全平方数;

而 $2660161 = 1631^2$，是完全平方数;

故选(4)。

（方法二）

如果完全平方数的十位数字是奇数，则它的个位数字一定是 6；

反之，如果完全平方数的个位数字是 6，则它的十位数字一定是奇数。

921438 和 750235 的十位数字是奇数，但个位数字不是 6；

76186 的个位数字是 6，但十位数字不是奇数;

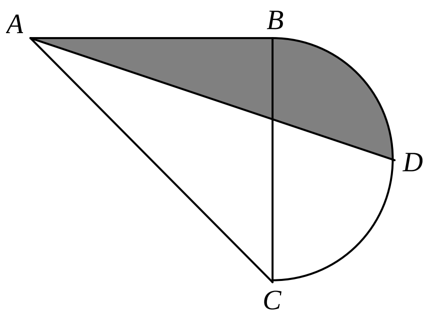
故 921438 、 76186 、 750235 均不是完全平方数;

而 $2660161 = 1631^2$，是完全平方数;

故选(4)。

【第 3 题】

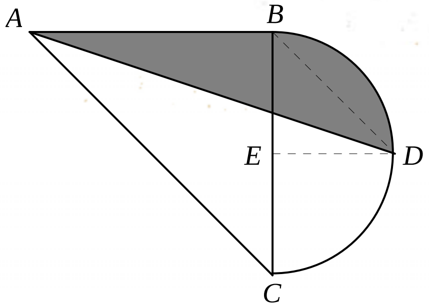
如图所示，$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，$AB = 28cm$。以 BC 为直径作半圆，点 D 是半圆圆弧的中点。试求阴影部分的面积。(取 $\pi = \frac{22}{7}$。)



【分析与解】

几何，巧求面积，割补。

（方法一）



取 BC 中点 E，联结 DE；联结 BD；

$S_{\triangle ABD}=AB\times BE\div 2=28\times 14\div 2=196$ 平方厘米；

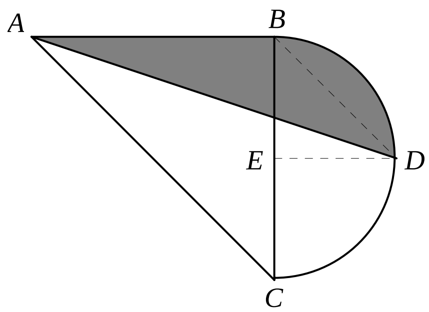
$S_{扇形BED}=\frac{1}{4}\times\pi\times BE^2=\frac{1}{4}\times\pi\times 14^2=49\pi$ 平方厘米；

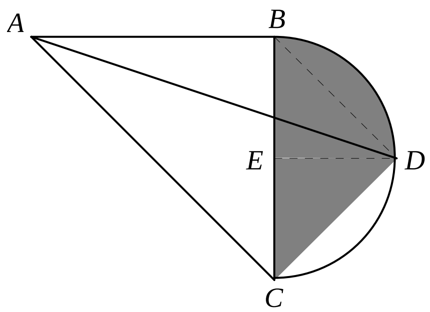
$S_{\triangle BED}=BE\times DE\div 2=14\times 14\div 2=98$ 平方厘米；

$S_{弓形BD}=S_{扇形BED}-S_{\triangle BED}=49\pi-98$ 平方厘米；

$S_{阴影}=S_{\triangle ABD}+S_{弓形BD}=196+(49\pi-98)=49\pi+98=49\times\frac{22}{7}+98=252$ 平方厘米。

（方法二）





取 BC 中点 E，联结 DE；联结 BD；
因为 $\triangle ABC$ 和 $\triangle BDE$ 都是等腰直角三角形；
所以 $\angle ACB=\angle DBE=45^\circ$；
所以 $AC\parallel BD$；

所以 $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle CBD}$；

$S_{扇形BED}=\frac{1}{4}\times\pi\times BE^2=\frac{1}{4}\times\pi\times 14^2=49\pi$ 平方厘米；

$S_{\triangle CED}=CE\times DE\div 2=14\times 14\div 2=98$ 平方厘米；

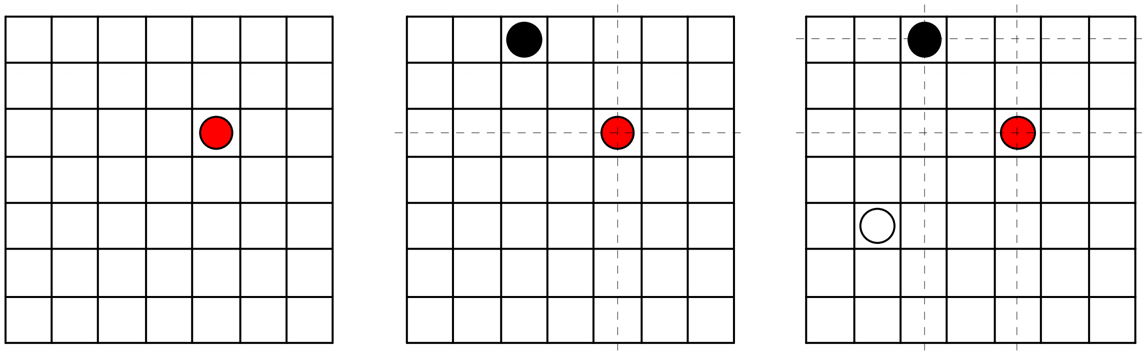
$S_{阴影}=S_{扇形BED}+S_{\triangle CED}=49\pi+98=49\times\frac{22}{7}+98=252$ 平方厘米。

【第 4 题】

在7×7的棋盘上放红、黑、白各1枚棋子，如果三种颜色的棋子两两不能放在同一行或同一列，那么不同的放法有多少种？

【分析与解】

计数，乘法原理。



先放红子，有 $7\times7=49$ 个格子可以放;

再放黑子，有 $6\times6=36$ 个格子可以放;

最后放白子，有 $5\times5=25$ 个格子可以放;

由乘法原理，有 $49\times36\times25=44100$ 种不同的放法。

【第 5 题】

六只袋子分别装有18， 19， 21， 23， 25和34枚硬币，其中一只袋子装的全是假的硬币，其他五只袋子不含有假的硬币。小聪取了三只袋子，而小敏取了另外两只袋子，剩下的那袋装的是假的硬币。如果小聪得到硬币的总枚数比小敏多一倍，那么假的硬币有几枚？

【分析与解】

数论，同余。

因为小聪得到硬币的总枚数比小敏多一倍;

即小聪得到硬币的总枚数是小敏的 2 倍;

所以小聪和小敏得到硬币的总枚数是小敏的3倍;

即小聪和小敏得到硬币的总枚数是3的倍数;

则六只袋子装的硬币的总枚数与剩下的那袋假币的枚数模3同余;

$18\equiv0\pmod{3}$， $19\equiv1\pmod{3}$， $21\equiv0\pmod{3}$， $23\equiv2\pmod{3}$， $25\equiv1\pmod{3}$， $34\equiv1\pmod{3}$；

$19+19+21+23+25+34\equiv0+1+0+2+1+1=5\equiv2\pmod{3}$；

故假的硬币有 23 枚。

【第 6 题】

将数码1，2，3，4，5，6，7，8，9，按某种次序写成一个九位数$\overline{abcdefghi}$。如果

$A=\overline{abc}+\overline{bcd}+\overline{cde}+\overline{def}+\overline{efg}+\overline{fgh}+\overline{ghi}$，求$A$的最大可能的值。

【分析与解】

数论，位值原理；极值问题。

$A=\overline{abc}+\overline{bcd}+\overline{cde}+\overline{def}+\overline{efg}+\overline{fgh}+\overline{ghi}$

$=a\times100+b\times110+(c+d+e+f+g)\times111+h\times11+i\times1$；

要使A尽可能的大;

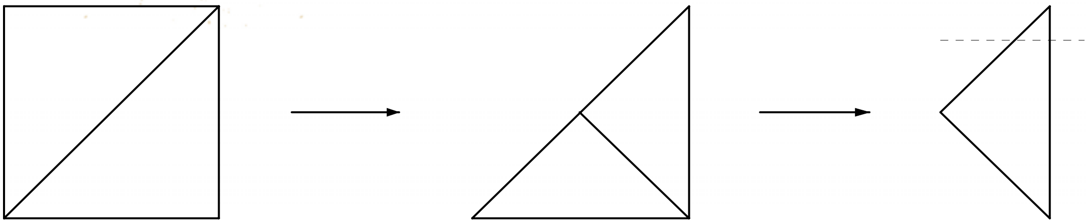
则从大到小依次考虑(c,d,e,f,g)，b，a，h，i；

当$(c,d,e,f,g)=(9,8,7,6,5)$，$b=4$，$a=3$，$h=2$，$i=1$时，

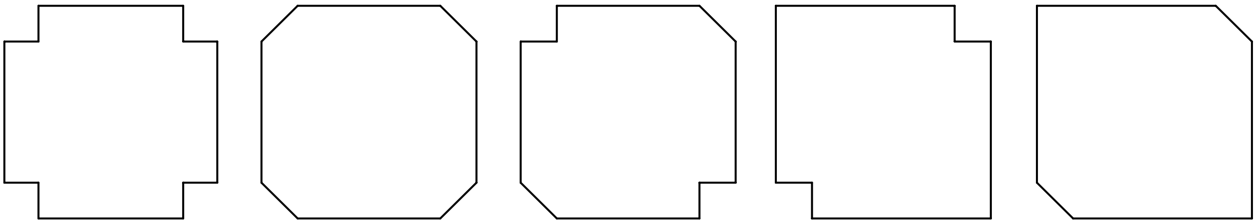
A最大，为$(9+8+7+6+5)\times111+4\times110+3\times100+2\times11+1\times1=4648$。

【第 7 题】

如图所示，将一张正方形的纸对折两次后，沿虚线剪开。



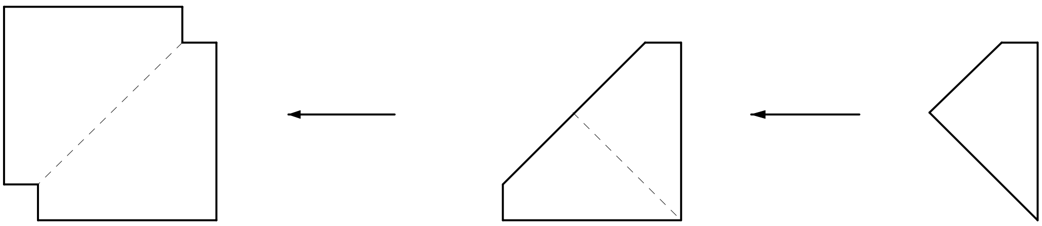
请问以下哪一个选项是展开后的图形？



(1) (2) (3) (4) (5)

【分析与解】

还原问题。



故选(4)。

【第 8 题】

计算： $20142013\times20132014-20132013\times20142014$ 。

【分析与解】

计算，乘法分配律及提取公因数。

$20142013\times20132014-20132013\times20142014$

$=20142013\times20132014-20132013\times(20142013+1)$

$=20142013\times20132014-(20132013\times20142013+20132013\times1)$

$=20142013\times20132014-20132013\times20142013-20132013$

$=20142013\times(20132014-20132013)-20132013$

$=20142013\times1-20132013=20142013-20132013=100000$

【第 9 题】
甲，乙，丙，丁四位同学参加了一个科学小测验。该测验只有5道是非题，每答对一题得1分。以下表格提供了每一位同学的答案以及甲，乙，丙所得的分数。请问丁得了几分？

	第一题	第二题	第三题	第四题	第五题	总分
甲	是	非	非	非	非	2
乙	非	是	非	非	是	3
丙	非	是	非	是	是	4
丁	非	是	是	非	是	

【分析与解】
逻辑推理。
比较乙和丙:
乙和丙两人只有第四题不同，且乙的得分比丙的得分低1;
故第四题的正确答案是“是”;
比较甲和丁:
甲和丁第一、二、三、五题答案恰好相反;
故第一、二、三、五题，甲和丁的得分之和为 4 分;
而甲和丁的第四题都不得分;
故甲和丁的得分之和为 4 分;
则丁得了 $4-2=2$ 分。

【第 10 题】
计算：$10\times\left(\frac{1}{1\times2}+\frac{5}{2\times3}+\frac{11}{3\times4}+\cdots+\frac{89}{9\times10}\right)$。
【分析与解】
计算，分数数列，裂项。

$$10\times\left(\frac{1}{1\times2}+\frac{5}{2\times3}+\frac{11}{3\times4}+\cdots+\frac{89}{9\times10}\right)=10\times\left(\frac{1-1}{1\times2}+\frac{6-1}{2\times3}+\frac{12-1}{3\times4}+\cdots+\frac{90-1}{9\times10}\right)$$

$$=10\times\left[\left(1-\frac{1}{1\times2}\right)+\left(1-\frac{1}{2\times3}\right)+\left(1-\frac{1}{3\times4}\right)+\cdots+\left(1-\frac{1}{9\times10}\right)\right]$$

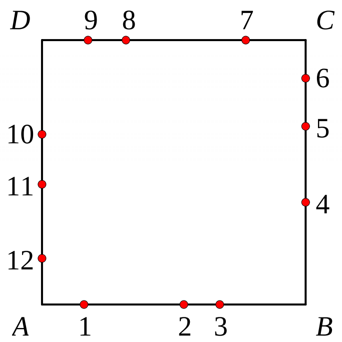
$$=10\times\left[\left(\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{9个1}\right)-\left(\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{9\times10}\right)\right]$$

$$=10\times\left\{9-\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)\right]\right\}$$

$$=10\times\left[9-\left(1-\frac{1}{10}\right)\right]=10\times\left(8+\frac{1}{10}\right)=10\times8+10\times\frac{1}{10}=80+1=81$$

【第 11 题】
已知一个三位数 N，被 3，7，11 除的余数分别是 1，3 和 8。试求 N 的最大值。
【分析与解】
数论，同余，物不知数。
（方法一）
$N \div 11$ 余 8，设 $N = 11a + 8$；
$N \div 7$ 余 3，则 $(11a + 8) \div 7$ 余 3，$(4a + 1) \div 7$ 余 3；
a 最小是 4，对应 N 是 $11 \times 4 + 8 = 52$；
则 $N \div 77$ 余 52，设 $N = 77b + 52$；
$N \div 3$ 余 1，则 $(77b + 52) \div 3$ 余 1，$(2b + 1) \div 3$ 余 1；
b 最小是 0，对应 $N = 77 \times 0 + 52 = 52$；
则 $N \div 231$ 余数 52；
$999 \div 231 = 4 \cdots\cdots 75$；
故三位数 N 最大是 $231 \times 4 + 52 = 976$。
（方法二）
$[3,7,11] = 3 \times 7 \times 11 = 231$；
根据中国剩余定理，$N \equiv (3 \times 7) \times 3 + (3 \times 11) \times 2 + (7 \times 11) \times 2 = 283 \equiv 52 \pmod{231}$；
$999 \div 231 = 4 \cdots\cdots 75$；
故三位数 N 最大是 $231 \times 4 + 52 = 976$。

【第 12 题】
如图所示，正方形 $ABCD$ 的四条边上有12个点。若以这12个点（不包括正方形的4个顶点）作为顶点，可以画出多少个三角形？



【分析与解】
计数，组合。

画出一个三角形需要3个顶点，从12个点中任选3个，有 $C_{12}^{3}=\dfrac{12\times11\times10}{3\times2\times1}=220$ 种选法;

其中，三个点在一条线上的是不能构成三角形，这样的情况有4种;
故可以画出 $220-4=216$ 个三角形。

【第 13 题】
砌一堵墙，工人甲单独干需要10小时，乙单独干需要11小时。如果两人合作，由于配合不好，每小时两人总共少砌48块砖。为了尽快完工，老板还是请甲乙两人合作，结果6小时完工。请问这堵墙有多少块砖组成？
【分析与解】
工程问题。
设工作总量为1;

甲的工作效率为 $1\div10=\dfrac{1}{10}$;

乙的工作效率为 $1\div11=\dfrac{1}{11}$;

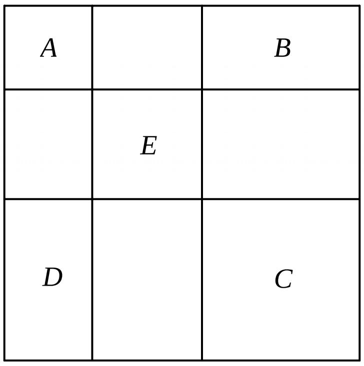
实际甲、乙两人的工作效率为 $1\div6=\dfrac{1}{6}$;

由于没有配合不好，则甲、乙两人每小时少完成 $\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{11}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{4}{165}$;

这堵墙有 $48\div\dfrac{4}{165}=1980$ 块砖组成。

【第 14 题】

图示一个被分割成九个长方形的正方形。已知长方形 E 实为正方形，且长方形 A，B，C 的面积分别为 $18cm^2$，$63cm^2$ 和 $189cm^2$，求长方形 D 的周长。

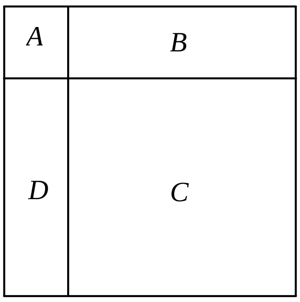


【分析与解】

几何，周长与面积，比例。

因为整个图形为一个大正方形，且 E 也是正方形;

所以 A、B、C、D 可以拼成一个正方形。



因为 $S_{长方形A} \times S_{长方形C} = S_{长方形B} \times S_{长方形D}$；

所以 $S_{长方形D} = S_{长方形A} \times S_{长方形C} \div S_{长方形B} = 18 \times 189 \div 63 = 54$ 平方厘米;

A、B、C、D 所拼成的正方形的面积为 $18+63+189+54=324$ 平方厘米，边长为 18 厘米;

长方形 D 的长与长方形 C 的长之比为 $54:189=2:7$；

长方形 D 的长为 $18 \times \frac{2}{2+7} = 4$ 厘米;

长方形 D 的宽与长方形 A 的宽之比为 $54:18=3:1$；

长方形 D 的宽为 $18 \times \frac{3}{3+1} = 13.5$ 厘米;

长方形 D 的周长为 $(4+13.5) \times 2 = 35$ 厘米。

【第 15 题】
如果将 2014 的每一天的日期都写成八位数的形式，例如 20140125 代表 2014 年1月 25 日，有多少个八位数中数码‘1’，‘2’，‘0’出现次数相同？
【分析与解】
计数。

设 2014 的每一天的日期都能写成八位数 $\overline{2014ABCD}$ 的形式；

其中，前四位数码‘1’，‘2’，‘0’出现次数相同；
则后四位数码‘1’，‘2’，‘0’出现次数相同。

当 $\overline{AB}=01$ 或 10 时，$\overline{CD}=23\sim29$，有 $2\times7=14$ 种；

当 $\overline{AB}=02$ 时，$\overline{CD}=13\sim19$，有 7 种；

当 $\overline{AB}=03\sim09$ 时，$\overline{CD}=12$ 或 21，有 $7\times2=14$ 种；

当 $\overline{AB}=11$ 时，不存在；

当 $\overline{AB}=12$ 时，$\overline{CD}=03\sim09$ 或 30，有 8 种；

综上所述，有 $14+7+14+8=43$ 个八位数中数码‘1’，‘2’，‘0’出现次数相同。

【第 16 题】
有 47 个不同的正整数，它们的和是 2014 。那么这 47 个正整数中至少有多少个偶数？
【分析与解】
极值问题。
根据奇偶性，要使这 47 个不同的正整数和为偶数，
则这 47 个正整数中有奇数个偶数；

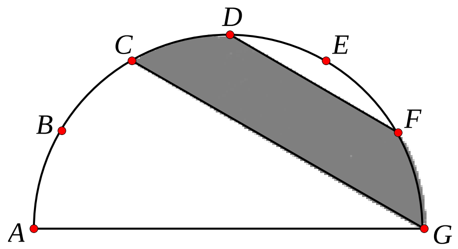
$$\left(\underbrace{1+3+5+\cdots}_{\text{从1开始连续46个奇数}}\right)+2=46^2+2=2118>2014;$$

$$\left(\underbrace{1+3+5+\cdots}_{\text{从1开始连续44个奇数}}\right)+(2+4+6)=44^2+(2+4+6)=1948<2014;$$

故这 47 个正整数中至少有 3 个偶数。

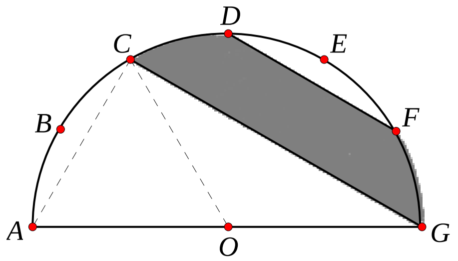
【第 17 题】

图示一个直径为 AG 的半圆形。半圆的弧被点 B、C、D、E 和 F 分成了六等份。DF 和 CG 均为直线段。已知该半圆形的面积是 $60cm^2$，请问阴影部分的面积为多少 cm^2？



【分析与解】

几何，圆与扇形。



设半圆形的圆心为点 O，分别联结 OC、AC；

因为 $AO=CO$；

所以 $S_{\triangle AOC}=S_{\triangle COG}$；

因为 $S_{弓形ABC}=S_{弓形DEF}$；

所以 $S_{空白}=S_{弓形ABC}+S_{\triangle AOC}+S_{\triangle COG}+S_{弓形DEF}=\left(S_{弓形ABC}+S_{\triangle AOC}\right)\times 2=S_{扇形AOC}\times 2=\left(S_{半圆}\times\frac{2}{6}\right)\times 2=\frac{2}{3}S_{半圆}$；

所以 $S_{阴影}=S_{半圆}-S_{空白}=S_{半圆}-\frac{2}{3}S_{半圆}=\frac{1}{3}S_{半圆}=\frac{1}{3}\times 60=20$ 平方厘米。

【第 18 题】

一辆巴士和一辆卡车分别从甲、乙两地同时开出，相向而行。两车经过 6 小时相遇，相遇时巴士距乙地 $240km$。巴士到达乙地休整一小时后返回甲地。已知卡车从乙地到甲地用了 15 小时，且卡车到达甲地也休整一小时后才返回乙地。请问，两车从第一次相遇到第二次相遇经过了几个小时？

【分析与解】

行程问题。

从出发到第一次相遇一共了 1 个全程;

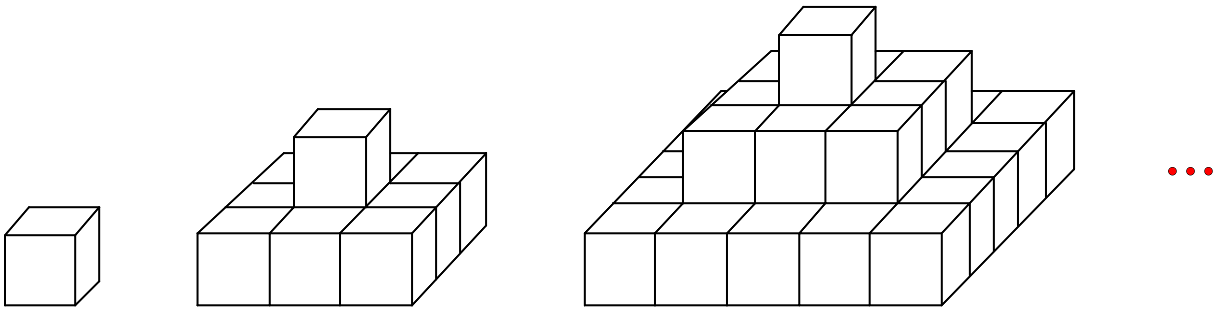
从出发到第二次相遇一共了 3 个全程;

因为两车速度不变;

所以两车从第一次相遇到第二次相遇经过了 $6\times3-6+1=13$ 个小时。

【第 19 题】

将棱长为 $1cm$ 的正方体按照图中所示范的方法摆放，请问第 20 个几何体的表面积是多少 cm^2？



【分析与解】

几何，立体表面积。

第 20 个几何体的最下面一层每条边有 $1+(20-1)\times2=39$ 个小正方体。

上面、下面的面积分别是 $39^2=1521$ 平方厘米;

前面、后面、左面、右面的面积是 $\underbrace{1+3+5+\cdots+39}_{\text{从1开始连续20个奇数}}=20^2=400$ 平方厘米;

第 20 个几何体的表面积是 $1521\times2+400\times4=4642$ 平方厘米。

【第 20 题】

小张有三块手表，第一块表每小时比标准时间快 2 分钟，第二块表快 6 分钟，第三块表快 16 分钟。如果现在三块表的分针都指向同样的方向，试问多少个小时后，三根分针再次指向同一方向？

【分析与解】

时钟问题。

第一块表每小时比标准时间快 2 分钟，第二块表每小时比标准时间快 6 分钟；

则第二块表比第一块表每小时多走 $6-2=4$ 小格；

每 $60\div4=15$ 小时，第一块表和第二块表分针指向同一方向；

第一块表每小时比标准时间快 2 分钟，第三块表每小时比标准时间快 16 分钟；

则第二块表比第一块表每小时多走 $16-2=14$ 小格；

每 $60\div14=\frac{30}{7}$ 小时，第一块表和第三块表分针指向同一方向；

$\left[15,\frac{30}{7}\right]=\frac{[15,30]}{(1,7)}=30$ 小时后，三根分针再次指向同一方向。

【第 21 题】

在某一年之中，星期一比星期五多，星期天比星期三多。请问，这一年的 3 月 1 日是星期几？

【分析与解】

周期问题。

$365\div7=52\cdots\cdots1$， $366\div7=52\cdots\cdots2$；

由题意，这一年星期天、星期一的天数各为 $52+1=53$ 天，

星期二、星期三、星期四、星期五、星期六的天数各为 52 天；

这一年是闰年；

这一年的 1 月 1 日是星期天；

闰年，1 月 1 日到 3 月 1 日一共有 $31+29+1=61$ 天；

$61\div7=8\cdots\cdots5$；

这一年的 3 月 1 日是星期四。

【第 22 题】
今有浓度为 5%，8%，9% 的甲，乙，丙三种盐水分别为 60 克，60 克和 47 克。现要配制浓度为 7% 的盐水100 克，试求甲种盐水最多可用多少克？最少可用多少克？请写下两数之和，作为本题的答案。
【分析与解】
浓度问题。
设甲种盐水用 x 克。
(1)要使甲种盐水尽可能多，则丙种盐水要尽可能多；
则丙种盐水用 47 克，甲种盐水用 x 克，乙种盐水用 $100-47-x=53-x$ 克；

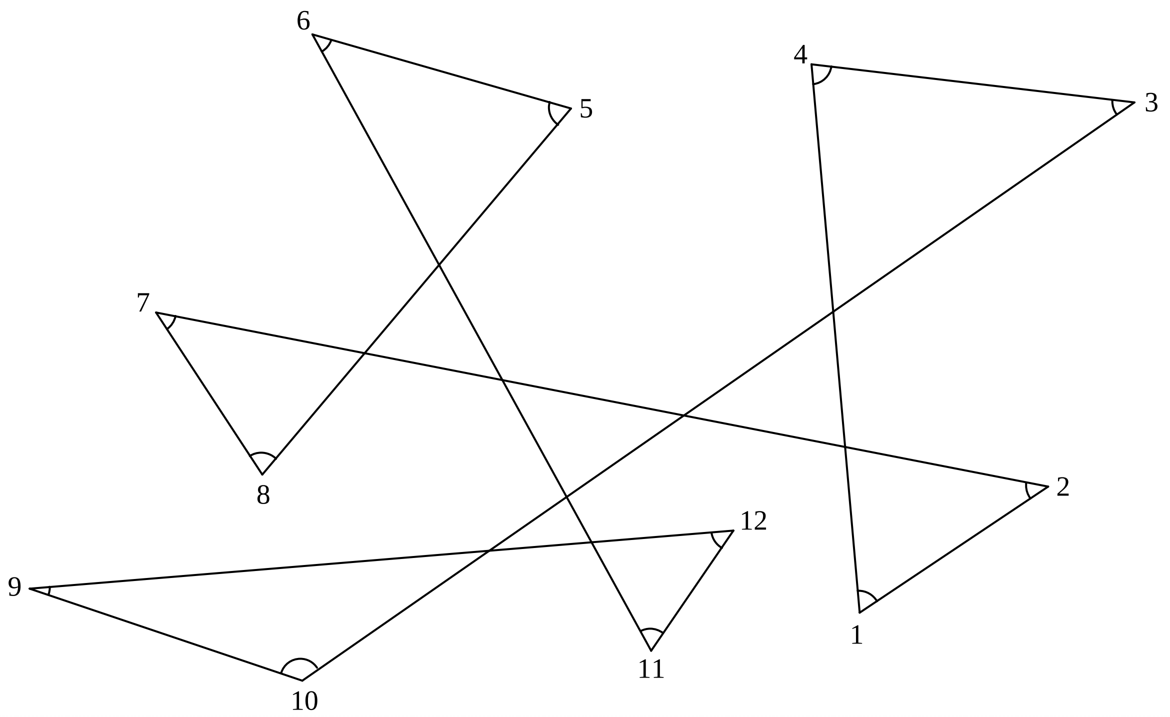
$$x\times5\%+(53-x)\times8\%+47\times9\%=100\times7\%;$$

解得 $x=49$；即甲种盐水最多可用 49 克。
(2)要使甲种盐水尽可能少，则乙种盐水要尽可能多；
则乙种盐水用 60 克，甲种盐水用 x 克，丙种盐水用 $100-60-x=40-x$ 克；

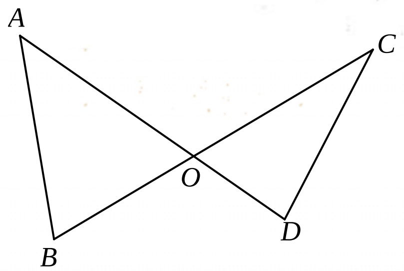
$$x\times5\%+60\times8\%+(40-x)\times9\%=100\times7\%;$$

解得 $x=35$；即甲种盐水最少可用 35 克。
故本题的答案为 $49+35=84$。

【第 23 题】
如图，求标有数字的12 个角的度数和。



【分析与解】
几何，角度。
我们先证一个引理:



如图所示，线段 AD 与线段 BC 相交于点 O，联结 AB、CD，则 $\angle A+\angle B=\angle C+\angle D$。

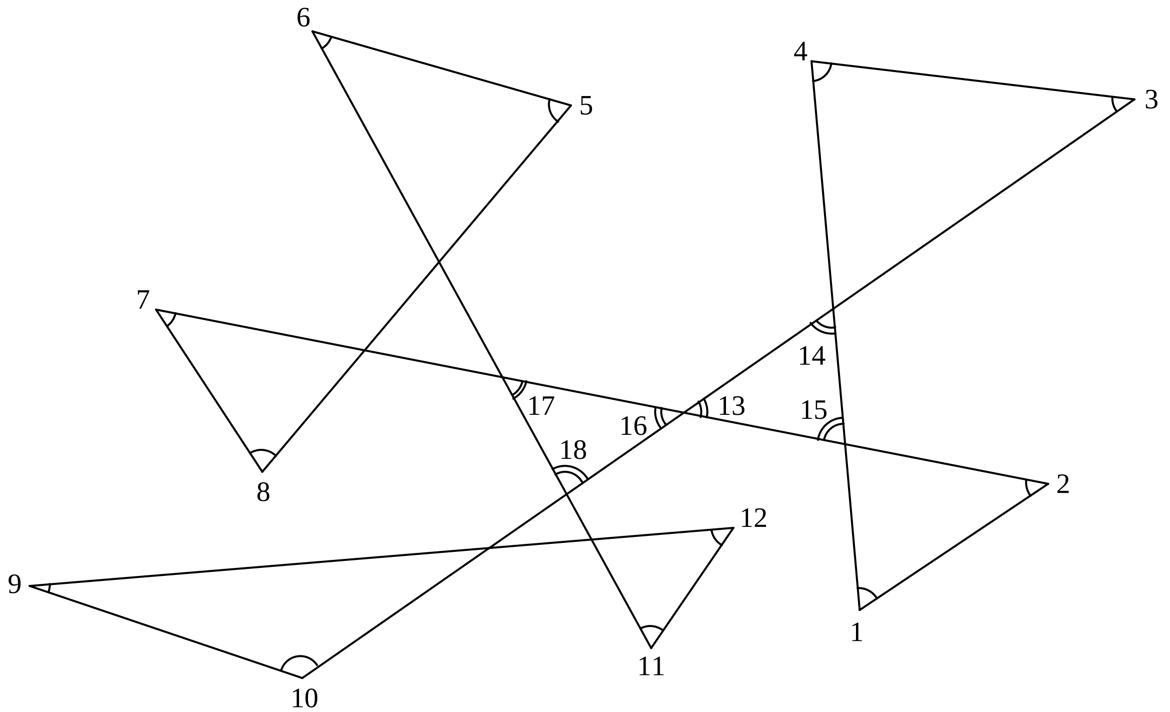
证明如下：

$\because \angle A+\angle B+\angle AOB=180^\circ$，$\angle C+\angle D+\angle COD=180^\circ$（三角形内角和等于 180°）；

$\therefore \angle A+\angle B+\angle AOB=\angle C+\angle D+\angle COD$（等量代换）；

$\because \angle AOB=\angle COD$（对顶角相等）；

$\therefore \angle A+\angle B=\angle C+\angle D$（等式性质）。



根据引理可得，$\angle 1+\angle 2=\angle 13+\angle 14$，$\angle 3+\angle 4=\angle 13+\angle 15$；

$\therefore \angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=(\angle 13+\angle 14+\angle 15)+\angle 13$；

$\because \angle 13+\angle 14+\angle 15=180^\circ$，$\angle 13=\angle 16$；

$\therefore \angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=180^\circ+\angle 16$；

同理，$\angle 5+\angle 6+\angle 7+\angle 8=180^\circ+\angle 17$，$\angle 9+\angle 10+\angle 11+\angle 12=180^\circ+\angle 18$；

$\therefore \angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5+\angle 6+\angle 7+\angle 8+\angle 9+\angle 10+\angle 11+\angle 12=180^\circ\times 3+(\angle 16+\angle 17+\angle 18)$；

$\because \angle 16+\angle 17+\angle 18=180^\circ$；

$\therefore \angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5+\angle 6+\angle 7+\angle 8+\angle 9+\angle 10+\angle 11+\angle 12=720^\circ$。

【第 24 题】
有一些正整数，它们除以 5 的余数与除以 6 的商之和等于 11。求满足这样条件的所有数的和。
【分析与解】
数论，余数。
(1)若这个数 $\div 5$ 的余数为 0，则这个数 $\div 6$ 的商为 $11-0=11$；
$6\times 11=66$，$6\times 11+5=71$，从 $66\sim 71$ 中，$\div 5$ 余 0 的数有 70；
(2)若这个数 $\div 5$ 的余数为 1，则这个数 $\div 6$ 的商为 $11-1=10$；
$6\times 10=60$，$6\times 10+5=65$，从 $60\sim 65$ 中，$\div 5$ 余 1 的数有 61；
(3)若这个数 $\div 5$ 的余数为 2，则这个数 $\div 6$ 的商为 $11-2=9$；
$6\times 9=54$，$6\times 9+5=59$，从 $54\sim 59$ 中，$\div 5$ 余 2 的数有 57；
(4)若这个数 $\div 5$ 的余数为 3，则这个数 $\div 6$ 的商为 $11-3=8$；
$6\times 8=48$，$6\times 8+5=53$，从 $48\sim 53$ 中，$\div 5$ 余 3 的数有 48 和 53；
(5)若这个数 $\div 5$ 的余数为 4，则这个数 $\div 6$ 的商为 $11-4=7$；
$6\times 7=42$，$6\times 7+5=47$，从 $42\sim 47$ 中，$\div 5$ 余 4 的有 44；
故满足这样条件的所有数的和 $70+61+57+48+53+44=333$。

【第 25 题】
将正整数 N 接写在任意一个正整数的右面（例如，将 21 接写在 35 的右面得 3521），如果得到的新数都能被 N 整除，那么 N 称为“魔术数”。请问，在小于 600 的正整数中有多少个“魔术数”？
【分析与解】
数论，约数倍数。
(1)如果 N 为一位数；
则由题意，得 $N\,|\,10m+N$，则 $N\,|\,10m$；
因为 m 为任意正整数；所以 $N\,|\,10$；

$10=2\times 5$ 有 $(1+1)\times(1+1)=4$ 个约数：1、2、5、10；

故 $N=1$、2、5。
(2)如果 N 为两位数；
则由题意，得 $N\,|\,100m+N$，则 $N\,|\,100m$；
因为 m 为任意正整数；所以 $N\,|\,100$；

$100=2^2\times 5^2$ 有 $(2+1)\times(2+1)=9$ 个约数：1、2、4、5、10、20、25、50、100；

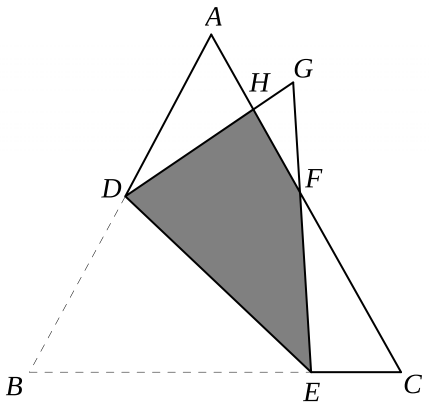
故 $N=10$、20、25、50。
(3)如果 N 为三位数；
则由题意，得 $N\,|\,1000m+N$，则 $N\,|\,1000m$；
因为 m 为任意正整数；所以 $N\,|\,1000$；

$1000=2^3\times 5^3$ 有 $(3+1)\times(3+1)=16$ 个约数：

1、2、4、5、8、10、20、25、40、50、100、125、200、250、500、1000；
故 $N=100$、125、200、250、500。
综上所述，在小于 600 的正整数中有 12 个“魔术数”。

【第 26 题】

如图，将三角形 ABC 沿线段 DE 折叠，得到一个七边形 $ADECFGH$ 。如果该七边形与原三角形的面积比是 $5:7$，且折叠后的重叠部分面积是 $8cm^2$，试求原三角形 ABC 的面积。



【分析与解】

几何，面积；量率对应。

因为 $S_{七边形ADECFGH}:S_{\triangle ABC}=5:7$；

又因为 $\triangle ABC$ 比七边形 $ADECFGH$ 大的面积恰好为阴影部分;

所以 $S_{七边形ADECFGH}:S_{\triangle ABC}:S_{阴影}=5:7:2$；

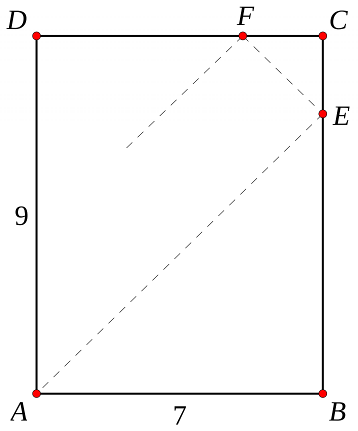
因为 $S_{阴影}=8$ 平方厘米;

所以 $S_{\triangle ABC}=8\div2\times7=28$ 平方厘米。

【第 27 题】
从 2014 到 6999 的正整数中，有多少个数的各位数字之和能被 5 整除？
【分析与解】
计数，乘法原理。
（方法一）
先考虑 $2000\sim6999$:
千位数字可以是 $2\sim6$，有 5 种选择;
百位数字可以是 $0\sim9$，有 10 种选择;
十位数字可以是 $0\sim9$，有 10 种选择;
个位数字，4 个数字相加个位是 0 或 5，有 2 种选择;
（例如：千位是 2、百位是 0、十位是 1，$2+0+1=3$，最后个位只能选 2 或 7）
由乘法原理，从 2000 到 6999 的正整数中，有 $5\times10\times10\times2=1000$ 个数各位数字之和能被 5 整除。
而 $2000\sim2013$ 中，各位数字之和能被 5 整除的数有 2003、2008、2012;
故从 2014 到 6999 的正整数中，有 $1000-3=997$ 个数的各位数字之和能被 5 整除。
（方法二）
我们考虑个位数字为 $0\sim9$，且其余数位上的数字都相同的连续 10 个自然数（例如 $2010\sim2019$）;
这样的 10 个连续的自然数，数字之和也是连续的;
而 10 个连续的自然数中，有且仅有 2 个数能被 5 整除;
故这样的 10 个连续的自然数中，有且仅有 2 个数它的数字之和能被 5 整除;
$2020\sim6999$ 一共有 4980 个数，有 $4980\div10\times2=996$ 个数各位数字之和能被 5 整除;
而 $2014\sim2019$ 中，各位数字之和能被 5 整除的数有 2017;
故从 2014 到 6999 的正整数中，有 $996+1=997$ 个数的各位数字之和能被 5 整除。

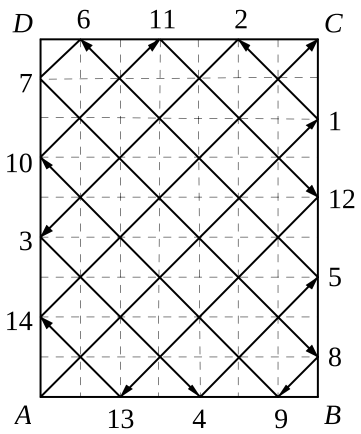
【第 28 题】

如图所示，在一张四边被围住，长为 $9cm$，宽为 $7cm$ 的长方形桌上，一个小球从 A 点以 45 度角的方向射出，到达 E 点后以 45 度角反弹，继续向前滚动。在整个运行过程中，小球每次碰到桌边就以 45 度角反弹。试问，从 A 点出发后，小球经过多少次反弹后第一次到达 C 点？



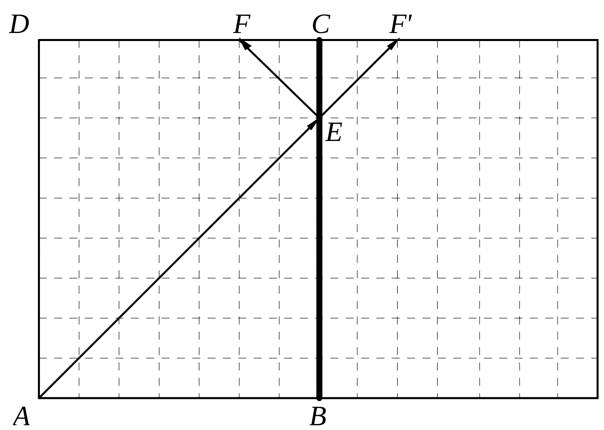
【分析与解】

（方法一）



如图所示，按照要求画出球的路线图，小球经过14次反弹后第一次到达 C 点。

（方法二）



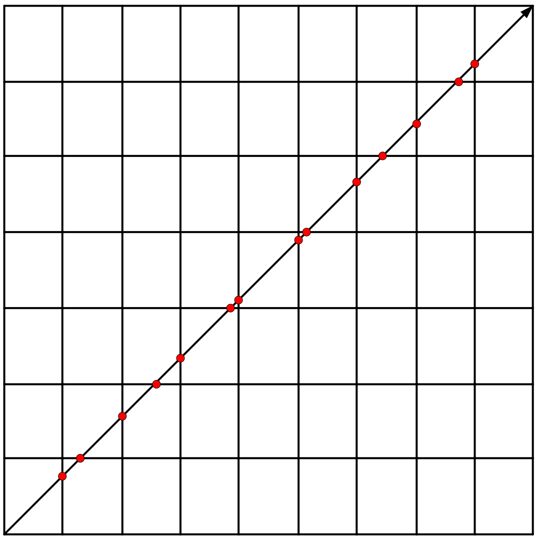
把长方形 $ABCD$ 沿 BC 翻折;
小球从 $A\to E\to F$ 与小球从 $A\to E\to F'$ 相同。
当小球再一次回到长方形某个顶点的时候，与则原长方形翻折组成图形为一个正方形;

$[9,7]=9\times 7=63$;

用 63 个长 7 宽 9 的长方形可以组成边长为 63 的正方形;
小球经历的碰撞次数与小球穿过翻折面的次数相同;

正方形的对角线穿过 $(63\div 7-1)+(63\div 9-1)=14$ 个翻折面;

故当小球再一次回到长方形某个顶点的时候，它经历了 14 次碰撞。



【第 29 题】
从 8 个英文字母 A，B，C，D，E，X，Y，Z，任意选取 5 个字母（字母允许重复）组成一个“词”，将所有可能的“词”按“辞典顺序”（即英汉辞典中英语词汇排列的顺序）排列，得到一个“词表”：
$AAAAA$，$AAAAB$，…，$AAAAZ$，$AAABA$，$AAABB$，…，$ZZZZY$，$ZZZZZ$。
试求位于“词”$CZYEB$ 与“词”$XCEDA$ 之间（这两个词除外）的“词”的个数。
【分析与解】
数论，进制与位置。
我们将 8 个英文字母 A，B，C，D，E，X，Y，Z 分别对应数字 0、1、2、3、4、5、6、7;
那么 $AAAAA$，$AAAAB$，…，$AAAAZ$，$AAABA$，$AAABB$，…，$ZZZZY$，$ZZZZZ$ 的排列顺序
与五位八进制数 00000，00001，…，00007，00010，00011，…，77776，77777 的排列顺序相同;
故位于“词”$CZYEB$ 与“词”$XCEDA$ 之间（这两个词除外）的“词”的个数
与位于五位八进制数 27641 与 52430 之间（这两个数除外）的五位八进制数的个数。

$(27641)_8=2\times 8^4+7\times 8^3+6\times 8^2+4\times 8^1+1\times 8^0=2\times 4096+7\times 512+6\times 64+4\times 8+1\times 1=(12193)_{10}$;

$(52430)_8=5\times 8^4+2\times 8^3+4\times 8^2+3\times 8^1+0\times 8^0=5\times 4096+2\times 512+4\times 64+3\times 8+0\times 1=(21784)_{10}$;

位于 12193 与 21784（这两个数除外）之间一共有 $21783-12194+1=9590$ 个数;
故位于“词”$CZYEB$ 与“词”$XCEDA$ 之间（这两个词除外）的“词”的个数为 9590。

【第 30 题】

现有300个学生站成一排，从第一个开始1至3报数，全部报完后，凡是报到3的倍数的人退出队伍，其余的人向前靠拢站成新的一排，再按此规则继续进行，直到若干轮后只剩下最后3个人为止。请问最后剩下的3人中的第三人，他最初在什么位置？

【分析与解】

将之前总人数÷3得到的商减去，差为操作一次后的总人数。

(1) $300\div3=100$， $300-100=200$；

(2) $200\div3=66\cdots\cdots2$， $200-66=134$；

(3) $134\div3=44\cdots\cdots2$， $134-44=90$；

(4) $90\div3=30$， $90-30=60$；

(5) $60\div3=20$， $60-20=40$；

(6) $40\div3=13\cdots\cdots1$， $40-13=27$；

(7) $27\div3=9$， $27-9=18$；

(8) $18\div3=6$， $18-6=12$；

(9) $12\div3=4$， $12-4=8$

(10) $8\div3=2\cdots\cdots2$， $8-2=6$；

(11) $6\div3=2$， $6-2=4$；

(12) $4\div3=1\cdots\cdots1$， $4-1=3$；

故经过12次操作，总人数由300人变为3人。

接下来从最后往前逆推，每2人就要增加1人;

①位置÷2，若有余数，“位置＋商”作为之前的位置;

②位置÷2，若没有余数，“位置＋商－1”作为之前的位置;

(1) $3\div2=1\cdots\cdots1$， $3+1=4$；

(2) $4\div2=2$， $4+2-1=5$；

(3) $5\div2=2\cdots\cdots1$， $5+2=7$；

(4) $7\div2=3\cdots\cdots1$， $7+3=10$；

(5) $10\div2=5$， $10+5-1=14$；

(6) $14\div2=7$， $14+7-1=20$；

(7) $20\div2=10$， $20+10-1=29$；

(8) $29\div2=14\cdots\cdots1$， $29+14=43$；

(9) $43\div2=21\cdots\cdots1$， $43+21=64$；

(10) $64\div2=32$， $64+32-1=95$；

(11) $95\div2=47\cdots\cdots1$， $95+47=142$；

(12) $142\div2=71$， $142+71-1=212$；

最后剩下的3人中的第三人，他最初在第212个位置。

上海学而思 外联竞赛部

2014年第25届亚太小学奥林匹克第一回合

城隍喵